

文章编号: 1000-7598-(2009)01-0143-04

纳米硅水泥土弹塑性有限元分析

王立峰¹, 黄洪勉²

(1. 浙江科技学院 土木系, 杭州 310012; 2. 浙江省瑞安市规划建设局, 浙江 瑞安 325200)

摘要: 试验表明水泥土中掺入适量的纳米硅材料可以大幅度地提高水泥土的抗压强度。在试验的基础上, 得出纳米硅水泥土的屈服条件后, 采用相关联的流动法则和塑性功硬化条件, 建立了纳米硅水泥土的弹塑性本构关系方程。在此基础上, 以空间轴对称为研究对象, 采用三角形截面的圆环单元, 应用虚功原理建立了轴对称条件下纳米硅水泥土有限元方程, 用增量刚度法求解, 且用 Matlab 软件编制了有限元程序, 在三轴试验条件下验证了该程序的合理性。以某机场水泥土搅拌桩地基处理方法作为工程背景, 应用不同纳米硅掺量的水泥土作为地基处理的新材料, 与传统水泥土进行了比较, 计算结果表明, 纳米硅作为水泥土外加剂用于地基处理可有效地减少地基沉降, 提高地基承载力, 在相同上覆压力下纳米硅水泥土处理后的地基沉降小于普通水泥土材料。

关键词: 纳米; 水泥土; 弹塑性; 有限元

中图分类号: TU 471.8; O 242.21

文献标识码: A

Elastoplastic finite element analysis of nanometer silicon and cement-stabilized soils

WANG Li-feng¹, HUANG Hong-mian²

(1. Department of Civil Engineering, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China;

2. Rui'an Planning and Construction Bureau of Zhejiang Province, Rui'an 325200, China)

Abstract: Tests show adding propriety nanometer silicon to cement-stabilized soils can improve compressive strength of cement-stabilized soils greatly. Based on tests, constitutive model of nanometer silicon and cement-stabilized soils is proposed by using the yield criterion attained by tests, related flow rules and plastic work hardening rules. The authors deduce finite element equations in conditions of spatial axisymmetry applying means of incremental stiffness by use of annulus element of triangular cross-section and principle of virtual work; and give Matlab programs; and the rationality of programs is verified by triaxial tests. Regarded as new kind of geotechnical material, nanometer silicon and cement-stabilized soils are used in ground improvement in airfield project in stead of routine cement-stabilized, and compared its use with routine cement-stabilized soils. The results show that nanometer silicon and cement-stabilized soils can decrease ground settlement and improve ground bearing capacity. Born on the same overlying pressure, the settlement of nanometer silicon and cement-stabilized soils is less than that of routine cement-stabilized soils.

Key words: nanometer; cement-stabilized soils; elastoplasticity; finite elements

1 引言

已有的研究成果表明, 在适宜的纳米硅掺量下水泥土能够大幅度提高水泥土的强度, 可有效改善水泥土的宏观力学性能^[1-3], 作为一种岩土工程材料它具有非线性、弹塑性和各向异性等性状。笔者做了大量试验, 推导出纳米硅水泥土的本构关系模型, 在前期工作的基础上, 采用常规三轴试验对模

型进行了验证, 对一个工程实例进行了分析和比较。计算结果表明, 纳米硅作为水泥土的外加剂用于地基处理, 与传统方法比较, 可有效减少地基沉降, 加固后的效果明显。

2 本构关系模型

采用相关联的流动法则和塑性功硬化条件, 应用通用的弹塑性本构关系模型, 屈服条件可从试验

收稿日期: 2006-11-27

作者简介: 王立峰, 男, 1968年生, 工学博士、博士后, 副教授, 主要从事岩土工程材料特性、地基处理和软黏土力学方面的教学和科研工作。
E-mail: wanglfzst@163.com

中^[2]得出:

$$\{d\sigma_{ij}\} = \left\{ [D_e] - \frac{[D_e] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T [D_e]}{A + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right\}} \right\} \{d\varepsilon\} \quad (1)$$

式中: $[D_e]$ 为弹性刚度矩阵; g 为塑性位势函数; f 为屈服函数; σ_{ij} 为应力张量。

$$[D_e] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1-\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: E 为弹性模量; ν 为泊松比。

$$[D_{ep}] = [D_e] - \frac{[D_e] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T [D_e]}{A + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right\}} \quad (3)$$

式中: $[D_{ep}]$ 为弹塑性刚度矩阵。

$$f(\sigma_{ij}) = (2+k^2)r^2 + 2r^2(1-k^2) \cdot \cos(2\theta + \pi/3) - 3r_t^2 = 0, \quad (0 \leq \theta \leq \pi/3) \quad (4)$$

式(4)是在试验的基础上推导出的纳米硅水泥土的屈服函数, $k = \frac{r_t}{r_c}$, r_t 和 r_c 分别为子午面上拉、

压曲线在 r 轴上的截距, 由试验确定。 r 为 π 平面上极坐标下的向径:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (5)$$

式中: θ 为应力与 σ_2 轴在 π 平面上投影轴垂线间的夹角, 即洛德角为

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{27J_3}{2q^3} \right) \quad (6)$$

式中: J_2 、 J_3 分别为应力偏量第二、三不变量。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial r_t} \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_{ij}} = C_1 \frac{\partial k}{\partial \sigma_{ij}} + C_2 \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + C_3 \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} + C_4 \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 4kJ_2 \left[1 - 2\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right]; \\ C_2 &= 2(2+k^2) + 4(1-k^2)\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 8J_2(1-k^2)\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) \frac{\partial \theta}{\partial J_2}; \\ C_3 &= -8J_2(1-k^2)\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) \frac{\partial \theta}{\partial J_3}; \\ C_4 &= -6r_t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{a_2\xi + b_2}{a_1\xi + b_1} = \frac{a_2\sigma_m + \sqrt{3}b_2}{a_1\sigma_m + \sqrt{3}b_1}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial J_2} &= \frac{\partial \left[\frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \right]}{\partial J_2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4\cos(3\theta)} \frac{1}{J_2^{5/2}}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial J_3} &= \frac{\partial \left[\frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \right]}{\partial J_3} = -\frac{\sqrt{3}}{2J_3^3 \cos(3\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

3 有限元公式

以空间轴对称研究对象, 采用的是三角形截面的整圆环, 在轴对称问题中只有径向位移 u 和轴向位移 w , 它们仅与坐标 r 、 z 有关, 与 θ 无关, 因此只需考虑坐标平面 rz 上的截面部分, 可简化为平面问题。单元的结点位移可用列阵表示为

$$\{\delta\}^e = \{\delta_i^T \delta_j^T \delta_m^T\}^T = \{u_i \ w_i \ u_j \ w_j \ u_m \ w_m\} \quad (10)$$

单元结点的应变可表示为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ u \\ r \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_m \\ w_m \end{Bmatrix} = [B]\{\delta\}^e \quad (11)$$

式中: $[B]$ 为应变矩阵。

单元的应力可表示为

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\}^e = [S]\{\delta\}^e \quad (12)$$

式中: $[S]$ 为应力矩阵。

用虚位移原理推导单元刚度矩阵, 在轴对称情况下, 单元的虚功方程为

$$\left(\{\delta^*\}^e\right)^T \{R\}^e = \iiint \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} r dr d\theta dz \quad (13)$$

设单元的虚位移和虚应变分别为

$$\{f^*\} = [N]\{\delta^*\}^e; \{\varepsilon^*\} = [B]\{\delta^*\}^e \quad (14)$$

式中: $[N]$ 为形函数矩阵。

将式 (14) 代入 (13) 式有

$$\left(\{\delta^*\}^e\right)^T \{R\}^e = \left(\{\delta^*\}^e\right)^T 2\pi \iint [B]^T [D] [B] r dr dz \{\delta\}^e \quad (15)$$

由于 $\{\delta^*\}^e$ 的任意性, 所以有

$$\{R\}^e = [k]\{\delta\}^e; [k] = 2\pi \iint [B]^T [D] [B] r dr dz \quad (16)$$

式中: $[k]$ 为单元刚度矩阵, 写成分块形式:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{jm} & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} [k_{st}] &= 2\pi \iint [B_s]^T [D] [B_t] r dr dz, \\ (s &= i, j, m; t = i, j, m) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

材料被划分为 n_e 个单元和 n 个结点, 把各单元的 $\{\delta^e\}$ 、 $\{R\}^e$ 、 $[k]$ 都加以扩大到整个结构的自由度维数, 然后叠加得到

$$\sum_{e=1}^{n_e} \{R\}^e = \left(\sum_{e=1}^{n_e} 2\pi \iint [B]^T [D] [B] r dr dz \right) \{\delta\} \quad (19)$$

写成一般形式:

$$[K]\{\delta\} = \{R\} \quad (20)$$

应用轴对称三角形圆环单元, 用增量刚度法求解。本程序用 Matlab 语言编写, 用波阵法求解线性方程组。

4 三轴试验中试样的弹塑性分析

为了验证程序的正确性和所使用本构模型的正确与否, 可以用三轴试验考题来验证。图 1 为纳米硅水泥土应力-应变关系实测值与理论值的比较曲线, 可见二者吻合较好。试验中采用 Tsy-1B 型应变控制台式三轴仪, 应变速率恒定为 0.016 mm/min。试样为圆柱体, 直径为 39.1 mm, 高 80 mm, 试验中围压恒定在 150 kPa。图 1 试验的条件相同, 只是

试样中纳米硅掺量不同, 有限元分析中所用参数见图 1, 可先由式 (8) 确定 c_i ($i=1 \sim 4$), 然后根据纳米硅水泥土本构关系式 (4), 并结合试验得到参数 a_i 、 b_i ($i=1, 2$)。 a_w 为水泥土掺量; a_n 为纳米硅掺量; T 为龄期; w/c 为水灰比。

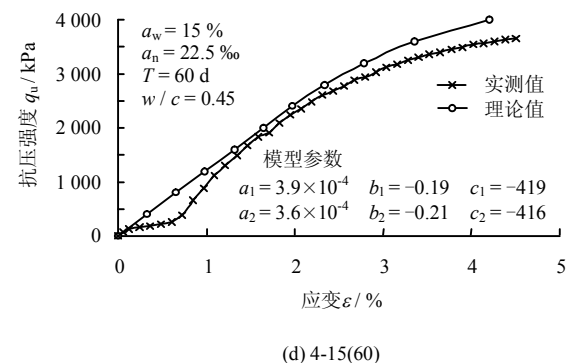
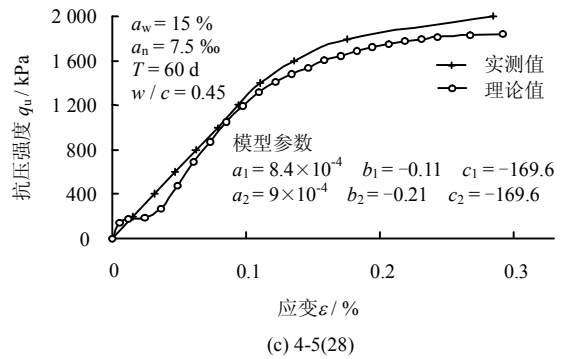
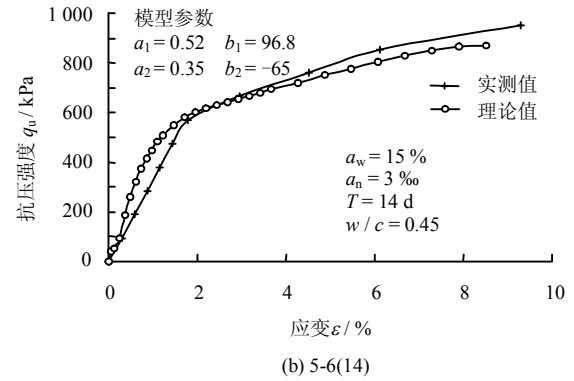
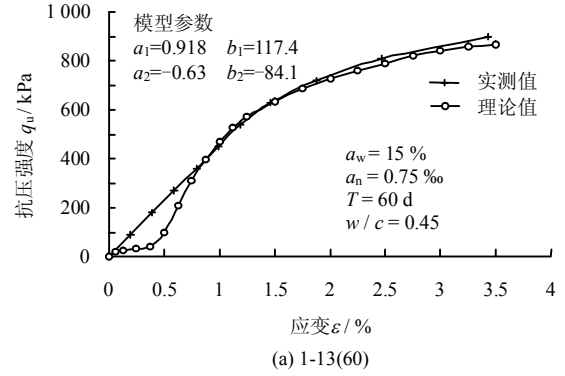


图 1 应力-应变关系曲线

Fig.1 Stress-strain curves

5 算例分析

某机场是建在深厚软土上的大型民用机场,跑道长 2 400 m,宽 45 m,跑道地基为国内典型的软弱地基。机场场区范围内土层较为均匀,自上而下分为 5 层,各土层物理力学参数见表 1^[4]。经过论证和分析,确定采用袋装竖井超载预压方案对机场跑道软弱地基进行加固处理。1989 年 9 月竣工,1990 年通航,1997 年决定扩建站坪和联络道。新站坪从原站坪向东扩建 55 m,向北扩建 230 m,新建联络道长 231.5 m,宽 23 m。鉴于天然地基根本无法满足正常使用要求,必须进行地基加固处理,根据具体情况,决定选用水泥搅拌桩处理软土地基,处理方案为:采用 425 号普通硅酸盐水泥,水泥掺合量为 13%,水灰比为 0.5,SN201-A 型复合添加剂为水泥用量的 0.12%,石膏掺量为水泥用量的 3%,桩径为 500 mm,桩长 10.0 m。本文将搅拌桩中的普通水泥土材料换成纳米硅水泥土材料,应用纳米硅水泥土的弹塑性本构关系方程,运用每层土应力-应变关系曲线经拟合而得出非线性本构模型。由于处理的对象为机场跑道,水泥土搅拌桩均匀分布,且机场场区范围内土层较为均匀,应用等量代换法简化为轴对称问题,用有限单元法计算桩基的沉降。边界条件为桩的影响范围横向上取跑道宽度的 2 倍即 90 m,深度上取 3 倍的桩长,即 30 m,该深度进入亚黏土层。由于各层土特别是桩长范围内的淤泥质粉质黏土横向和纵向的渗透系数在 10^{-7} cm/s 数量级,可不考虑水的作用。

表 1 机场地基各土层主要物理力学性质指标
Table 1 Main physics-mechanical properties
of airfield soils

层序	岩性名称	层厚 / m	重度 /(kN/m ³)	孔隙比 / e_0	弹性压缩 指数 C_s	压缩 指数 C_c
I	硬壳层	0.7~1.7	17.54	1.03	0.022	0.165
II	淤泥质 粉质黏土	8.6~10	16.86	1.24	0.082	0.505
III	淤泥	15.2~18	16.17	1.62	0.065	0.609
IV	亚黏土	35~41	17.35	1.10	0.047	0.352

被置换的纳米硅水泥土除外加剂外,要求与实际工程中应用的普通水泥土配合比相同。笔者选取 2 种纳米硅水泥土材料,其配合比分别为:材料 a,水泥掺量为 12%,纳米硅掺量为 6%,水灰比为 0.5,28 d 无侧限抗压强度为 696.7 kPa。材料 b,水泥掺量为 12%,纳米硅掺量为 12%,水灰比为

0.5,28 d 无侧限抗压强度为 1 269.8 kPa,沉降的计算结果见表 2。计算结果表明,在相同上覆压力和相同水泥掺量下纳米硅水泥土桩基沉降小于普通水泥土材料;纳米硅掺量为 12% 的水泥土材料比掺量为 6% 的水泥土材料为小。

表 2 3 种材料的沉降计算表
Table 2 Three materials' settlement calculated results

材料	沉降 / mm
普通水泥土材料	100.2
材料 a	50.1
材料 b	40.7

6 结 论

综上所述分析可以得到以下结论:

(1) 弹塑性本构关系模型能够较好反映纳米硅水泥土的应力-应变关系,关键要通过试验确定纳米硅水泥土的屈服性状,并选择合适的参数。

(2) 纳米硅水泥土的弹塑性有限元分析结果表明,纳米硅作为水泥土外加剂用于地基处理能够有效地减少地基沉降,提高地基承载力。

参 考 文 献

- [1] 王立峰,朱向荣,张学文,等. 纳米硅水泥土屈服特性分析[J]. 科技通报, 2005, 21(3): 327—331.
WANG Li-feng, ZHU Xiang-rong, ZHANG Xue-wen, et al. Experimental analysis of yielding criterion of nanometer silicon and cement soil[J]. *Bulletin of Science and Technology*, 2005, 21(3): 327—331.
- [2] 王立峰,朱向荣,王陈捷,等. 纳米硅水泥土本构模型研究[J]. 浙江科技学院学报, 2004, 16(4): 259—264.
WANG Li-feng, ZHU Xiang-rong, WANG Chen-jie, et al. Study of constitutive model of nanometer silicon and cement-stabilized soils[J]. *Journal of Zhejiang University of Science and Technology*, 2004, 16(4): 259—264.
- [3] 朱向荣,王立峰,丁同福. 纳米硅水泥土工程特性的实验研究[J]. 岩土工程技术, 2003, (4): 187—192.
ZHU Xiang-rong, WANG Li-feng, DING Tong-fu. Study on engineering properties of nanometer silica and cement-stabilized soil[J]. *Geotechnical Engineering Technique*, 2003, (4): 187—192.
- [4] 王立峰. 纳米硅水泥土工程特性及本构模型研究[博士学位论文 D]. 杭州: 浙江大学, 2003.